# *Mathématiques*

# *préparation à la Terminale ES*

Le programme de Terminale ES est **chargé** et est la **continuité** de celui de **1ère ES**.

Les **nouvelles notions** sont **nombreuses** et le **rythme** de progression est **rapide**.

Les **bases de 1ère ES** ne seront donc que très rapidement reprises au fil des chapitres.

C'est pourquoi il est impératif d'être **prêt le jour de la rentrée**.

Pour faciliter le **travail personnel de révision** en fin de vacances, ce fichier contient des résultats de cours à compléter et à connaître et des exercices d'application.

Une semaine avant la rentrée, une correction succincte des exercices sera mise en ligne sur l'ENT.

## *Notations*

$\forall$ signifie « pour tout »

$\in$ : « appartient à » , symbole utilisé entre un élément et un ensemble

$\subset$ : ……………………………… , symbole utilisé entre deux ensembles

$\cap$ : ………………………………

$\cup$ : ………………………………

## *Ensembles de nombres*

$\emptyset$ est l'ensemble vide

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres ………………………………………………………………

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres ………………………………………………………………

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres ………………………………………………………………

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres ……………………………………………………………

$\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres ……………………………………………………………

$\mathbb{R}^{-*}$ est l'ensemble des nombres …………………………………………………………

### *QCM*

( plusieurs réponses possibles )

**1°)** $\mathbb{N} \cap [-2; 2] = \ldots$

☐ $\{2\}$

☐ $\{1\,;2\}$

☐ $\{0\,;1\,;2\}$

☐ $[0; 2]$

**2°)** $-3^2 \in \ldots$

☐ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{Z}$

**3°)** $(-3)^2 \in \ldots$

☐ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{Z}$

**4°)** Si $x \in \mathbb{R}^+$ alors

☐ $x \in \mathbb{N}$

☐ $x \in \mathbb{R}$

**5°)** Si $x \in \mathbb{R}^+$, alors

☐ $x \geq 0$

☐ $x > 0$

**6°)** $n \in \mathbb{N}^*$ signifie

☐ $n$ entier positif

☐ $n$ entier et $n \geq 1$

**7°)** Si $x \in \mathbb{R}^{-*}$, alors

☐ $x < 0$

☐ $x \leq -1$

**8°)** $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \ldots$

☐ $\emptyset$

☐ $\mathbb{R}$

☐ $\{0\}$

**9°)** $\mathbb{N} \subset \ldots$

☐ $\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{R}^{+*}$

## *Fractions* (écrire sous la forme d'une seule fraction )

Pour tous réels $a$, $b$, $c$ et $d$ non-nuls

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \cdots$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \cdots$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \cdots$

$\frac{a}{b} + c = \cdots$

$\frac{a}{b} \times c = \cdots$

$\frac{a}{b} : c = \cdots$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \cdots$

$\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \cdots$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \cdots$

$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \cdots$

## *Calculer sans calculatrice* (puis vérifier à la calculatrice)

$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$B = 3\left(\frac{2}{5} - \frac{6}{7}\right)$

$C = \dfrac{\frac{1}{2}}{3} - \dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

$D = \dfrac{1 + \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{5}}$

## *Puissances*

Pour tous réels $a$ et $b$ non-nuls. Pour tous entiers naturels $n$ et $p$.

$a^0 = \ldots$

$a^1 = \ldots$

$a^{-n} = \cdots$

$a^n \times a^p = \ldots$

$\frac{a^n}{a^p} = \cdots$

$(a^n)^p = \ldots$

$(a \times b)^n = \ldots$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \cdots$

## *Vrai / Faux* (sans calculatrice, cocher les égalités vraies)

☐ $5^{-2} = 0{,}05$

☐ $2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} = 0{,}023$

☐ $5^3 + 5^{-7} = 5^{-4}$

☐ $5^3 + 5^{-7} = 10^{-4}$

☐ $5^3 \times 5^{-7} = 5^{-4}$

☐ $5^3 \times 5^{-7} = 5^{-21}$

☐ $(5^3)^{-7} = 5^{-21}$

☐ $(5^3)^{-7} = 5^{-4}$

☐ $\frac{5^3}{5^{-7}} = 5^{10}$

☐ $\frac{5^3}{5^{-7}} = 5^{-4}$

☐ $5^3 + 2^3 = 7^3$

☐ $5^3 \times 2^3 = 10^3$

☐ $\frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$

☐ $(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$

☐ $(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2$

☐ $\frac{1}{3^4} = -3^4$

## *Formes d'une expression algébrique*

*Les identités remarquables*

$(a+b)^2 = \dots$

$(a-b)^2 = \dots$

$(a-b)(a+b) = \dots$

*ne pas confondre*

$a \times (b+c) = \dots$

$a \times (b-c) = \dots$

$a \times (b \times c) = \dots$

*ne pas confondre*

$x \times x \times x = \dots$

$x + x + x = \dots$

## *Racines carrées*

Pour tous $a$ et $b$ positifs

$\sqrt{a \times b} = \dots$

si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \dots$

$(\sqrt{a})^2 = \dots$

## *Equations*

$\Leftrightarrow$ signifie « est équivalent à »

$A(x) \times B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \ \dots \ B(x) = 0$

$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) \dots 0 \ \dots \ B(x) \dots 0$

Pour tout réel $a$
Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution dans $\mathbb{R}$ qui est $x = \dots$
Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont $x = \dots$ et $x = \dots$

## *Inéquation*

### *QCM*

**1°)** Lorsqu'on **ajoute** un même nombre $k$ aux deux membres d'une inéquation,
alors le sens de l'inéquation
☐ change si .................
☐ ne change pas

**2°)** Lorsqu'on **multiplie** par un même nombre $k \neq 0$ les deux membres d'une inéquation,
alors le sens de l'inéquation
☐ change si .................
☐ ne change pas

**3°)** Lorsqu'on **soustrait** un même nombre $k$ aux deux membres d'une inéquation,
alors le sens de l'inéquation
☐ change si .................
☐ ne change pas

**4°)** Lorsqu'on **divise** par un même nombre $k \neq 0$ les deux membres d'une inéquation,
alors le sens de l'inéquation
☐ change si .................
☐ ne change pas

## *Signe d'une expression*

### *QCM* ( une seule bonne réponse )

**1°)** Le produit de deux facteurs négatifs est
☐ négatif
☐ positif
☐ ça dépend des facteurs

**2°)** Le produit de deux facteurs positifs est
☐ négatif
☐ positif
☐ ça dépend des facteurs

3°**)** Le produit de deux facteurs de signes contraires est
☐ négatif
☐ positif
☐ ça dépend des facteurs

**4°)** La somme de deux termes négatifs est
☐ négative
☐ positive
☐ ça dépend des termes

**5°)** La somme de deux termes positifs est
☐ négative
☐ positive
☐ ça dépend des termes

6°**)** La somme de deux termes de signes contraires est
☐ négative
☐ positive
☐ ça dépend des termes

Pour tous $a$ et $b$ réels avec $a \neq 0$, l'expression $\boldsymbol{ax+b}$ s'annule pour $x = \ldots$

| $x$ | $-\infty$ | | $\ldots$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax+b$ | | $\ldots$ | $0$ | $\ldots$ | |

Pour tous $a$, $b$ et $c$ réels avec $a \neq 0$, l'expression $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ est appelé trinôme (polynôme) du 2nd degré
Son discriminant $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Si …………… alors $ax^2+bx+c$ n'admet aucune racine et n'est pas factorisable
- Si …………… alors $ax^2+bx+c$ admet une seule racine (double) et est factorisable

  $x_0 = \ldots$ $\qquad\qquad$ $ax^2+bx+c = \ldots$
- Si …………… alors $ax^2+bx+c$ admet deux racines distinctes et est factorisable

  $x_1 = \ldots$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \ldots$ $\qquad\qquad$ $ax^2+bx+c = \ldots$

Si $\Delta$ ……

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$ | | $\ldots$ | |

Si $\Delta$ ……

| $x$ | $-\infty$ | | $\ldots$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$ | | $\ldots$ | $0$ | $\ldots$ | |

Si $\Delta$ ……

| $x$ | $-\infty$ | | $\ldots$ | | $\ldots$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$ | | $\ldots$ | $0$ | $\ldots$ | $0$ | $\ldots$ | |

***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :***

**a.** $5(2x-3) = (x-1)(2x-3)$

**b.** $4x^2 - 1 + x(2x+1) = 0$

**c.** $x^2 - 6x + 9 - 2(x-3) = 0$

**d.** $\dfrac{x(3x-1)-x(2x+3)}{16-x^2} = 0$

***Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (à l'aide d'un tableau de signes) :***

**a.** $(3x-6)(-x^2-4x+45) < 0$

**b.** $\dfrac{9x^2-6x+1}{2-x} \leq 0$

**c.** $\dfrac{-3x}{x^2-5x-6} \geq 0$

***Exercice***

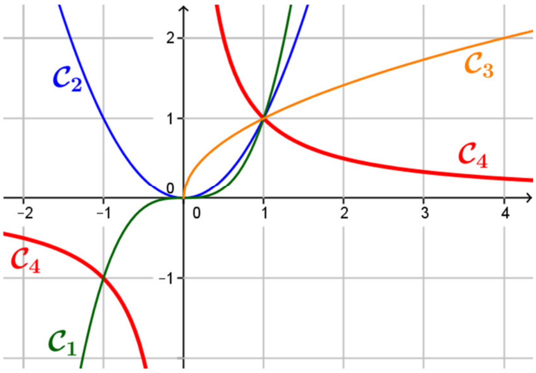
1. Soit $B$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

   Résoudre dans l'intervalle $[0\,;60]$ l'inéquation $B(x) > 0$
2. Un artisan fabrique des vases. Il estime que le bénéfice, en euros, réalisé par la fabrication et la vente de $x$ vases, est donné par la fonction $B$.

   **a.** Pour quelle(s) quantité(s) de vases vendus l'artisan fait-il un bénéfice ?

   **b.** Pour quelle(s) quantité(s) de vases vendus l'artisan fait-il un bénéfice de 300 € ?

## *Fonctions de référence*




*Représentations graphiques*

La fonction carré est représentée par la courbe ...........

La fonction inverse est représentée par la courbe ...........

La fonction cube est représentée par la courbe ...........

La fonction racine carrée est représentée par la courbe ...........

## *Dérivation*

Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand $h$ tend vers 0,

alors la fonction $f$ est dérivable en $a$ et le nombre dérivé de la fonction $f$ en $a$ est le réel $f'(a)$ tel que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Graphiquement, $f'(a)$ est le ............................................... de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$

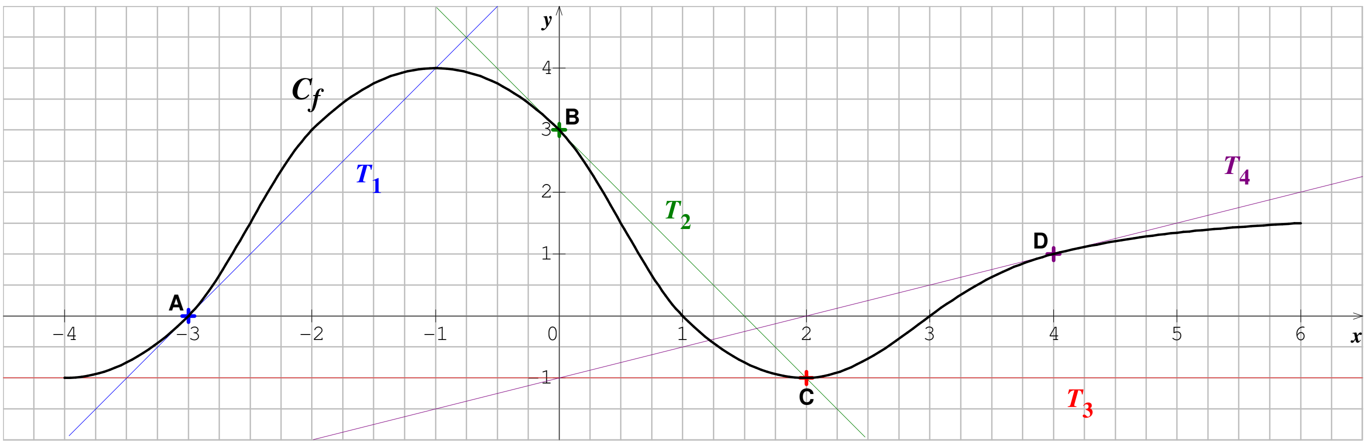
La tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$ a pour équation ........................................................

*Remarque :* le point de la courbe de $f$ d'abscisse $a$ a pour coordonnées ( ......... ; ......... )

## *Lecture graphique*

Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur $[-4\,;6]$ dont la représentation graphique $\boldsymbol{C_f}$ est donnée ci-dessous.

Les droites $\boldsymbol{T_1}$ , $\boldsymbol{T_2}$ , $\boldsymbol{T_3}$ et $\boldsymbol{T_4}$ sont les tangentes à $C_f$ aux points ***A***, ***B***, ***C*** et ***D***.




Par lecture graphique,

| | | |
|---|---|---|
| $T_1$ a pour équation ............................... | $f(-3) =$ ......... | $f(2) =$ ......... |
| $T_2$ a pour équation ............................... | $f'(-3) =$ ......... | $f'(2) =$ ......... |
| $T_3$ a pour équation ............................... | $f(0) =$ ......... | $f(4) =$ ......... |
| $T_4$ a pour équation ............................... | $f'(0) =$ ......... | $f'(4) =$ ......... |

*Fonctions de référence*

| Fonction $f$ | $f$ est définie sur | $f$ est dérivable sur | Fonction dérivée $f'$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \ldots$ |
| $f(x) = x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \ldots$ |
| $f(x) = x^2$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \ldots$ |
| $f(x) = x^3$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \ldots$ |
| $f(x) = x^4$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \ldots$ |
| $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \ldots$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ | $f'(x) = \ldots$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^{+*}$ | $f'(x) = \ldots$ |

*Opérations*

Pour tous $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et $k$ un réel

$(u+v)' = \ldots$

$(ku)' = \ldots$

$(uv)' = \ldots$

$(u^2)' = \ldots$

Si $u$ ne s'annule pas sur $I$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \ldots$

Si $v$ ne s'annule pas sur $I$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \ldots$

*Utilisation de la dérivée*

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

La fonction $f$ est croissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout réel $x$ de $I$, on a $f'(x)$.........

La fonction $f$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout réel $x$ de $I$, on a $f'(x)$.........

***Pour chacune des fonctions $f$ suivantes :***

1. ***Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe***
2. ***Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur son ensemble de définition***

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

$f(x) = (2-x)\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$ sur $\mathbb{R} - \{3\}$

$f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+1}$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{1}{3x^2-2x+5}$ sur $\mathbb{R}$

***Fonction inconnue***

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $C_f$ la représentation graphique de $f$.

Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$.

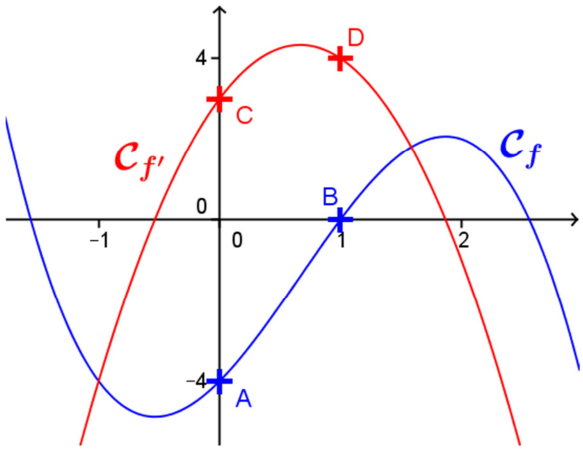
Soit $C_{f'}$ la représentation graphique de $f'$.

$C_f$ passe par les points $A(0; -4)$ et $B(1; 0)$.

$C_{f'}$ passe par les points $C(0; 3)$ et $D(1; 4)$.

Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



### *Position relative de courbes*

Pour étudier la position relative des courbes $C_f$ et $C_g$ de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$, on calcule pour tout réel $x$ de $I$, la différence $f(x) - g(x)$ puis on étudie son signe.

$C_f$ est au-dessus de $C_g$ sur $I$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in I\,, f(x) > g(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in I\,, f(x) - g(x) > 0$

$C_f$ est au-dessous de $C_g$ sur $I$ $\Leftrightarrow$ ……………………………… $\Leftrightarrow$ ………………………………………

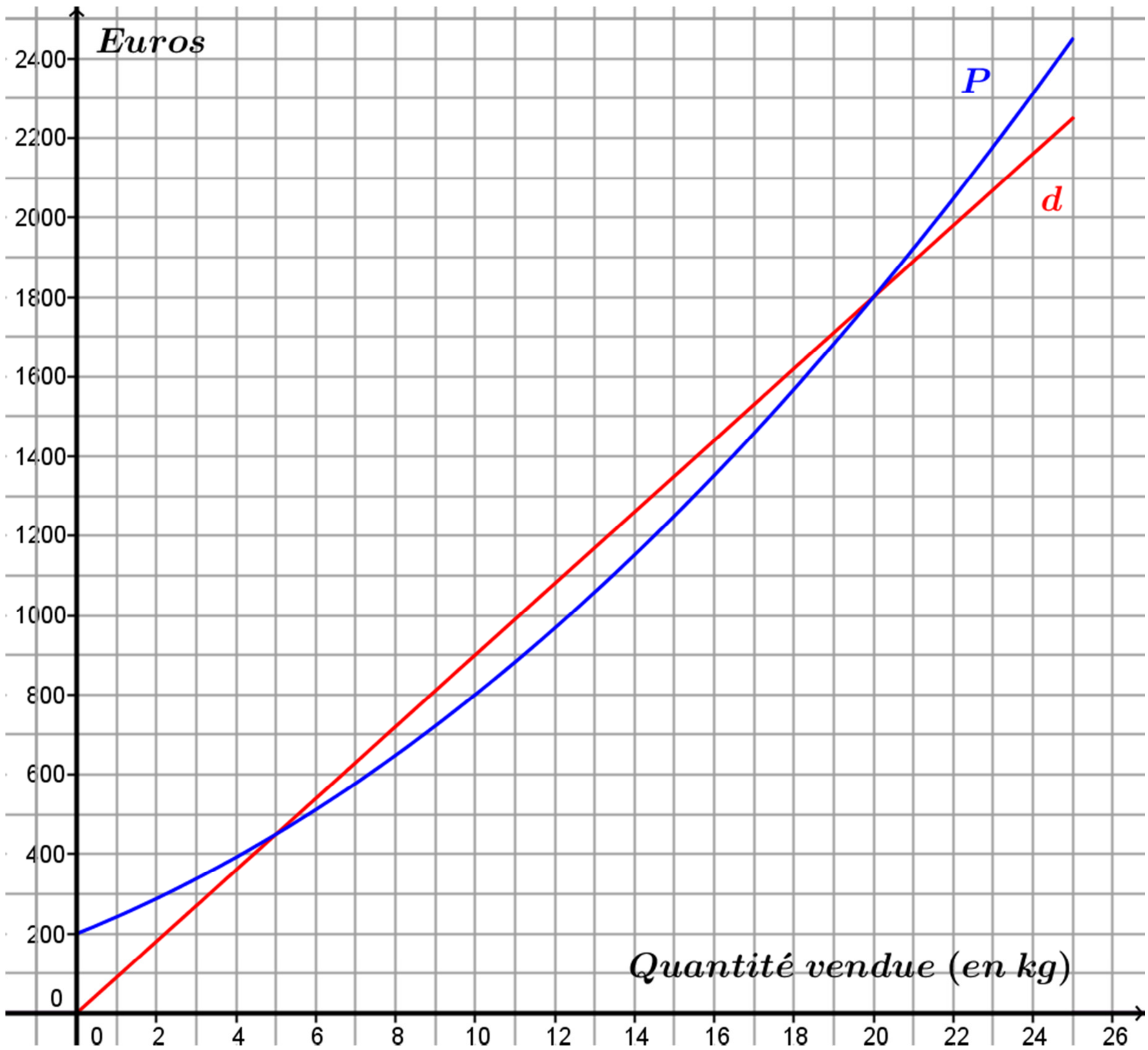
### *Optimisation*

Dans une usine de produits cosmétiques, le coût de fabrication journalier d'un crème est donné (en euros) par : $C(x) = 2x^2 + 40x + 200$ , où $x$ est la quantité en kilogrammes, pour $x \in [0\,;25]$.

Le prix de vente est de 90 € le kilo et on suppose que toute la production de l'entreprise est vendue.

La recette, en fonction de $x$ kilogrammes de produits vendus, est notée $R(x)$.

La représentation $P$ de la fonction $C$ et la représentation $d$ de la fonction $R$ sont données ci-dessous.




1. Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de la quantité $x$ de produits vendus.
2. Démontrer que ce bénéfice est de 72 € pour 8 kilogrammes vendus.
3. Démontrer, par le calcul, que $B(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [5\,;20]$
4. Donner la quantité de produits que l'entreprise doit vendre pour réaliser des bénéfices.
5. Expliquer comment le résultat de la question précédente peut être vérifié graphiquement.
6. Calculer $B'(x)$.
7. Dresser le tableau de variations de $B$ sur l'intervalle $[0\,;25]$.
8. En déduire la production qui génèrera le meilleur bénéfice pour cette entreprise et calculer ce bénéfice.

### *Etude de fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $[-10\,;10]$ par $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+4}$

Soit $C_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère donné.

1. A l'aide de la calculatrice, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$
   Donner la fenêtre d'affichage utilisée.
2. A l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de la fonction $f$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
5. En déduire les coordonnées des points en lesquels $C_f$ admet une tangente horizontale.
6. Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
7. Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à $C_f$ au point d'abscisse $-3$ et vérifier que $T$ a pour équation $y = -0{,}2x - 1{,}2$
8. Dans un repère orthogonal, avec en abscisses 1cm pour 1 unité et en ordonnées 10 cm pour 1 unité, tracer la droite $T$, les tangentes horizontales à $C_f$ déterminées à la question **5.** puis tracer l'allure de la courbe $C_f$.

### *Pourcentages*

Le **taux d'évolution** d'une valeur $y_1$ à une valeur $y_2$ est $T =$ ..............................................

**Augmenter** une quantité de $x$ % revient à multiplier cette quantité par ..................................

**Diminuer** une quantité de $x$ % revient à ...........................................................................

Faire **évoluer** une quantité d'un **taux** $\boldsymbol{t}$ revient à multiplier cette quantité par .............................

Faire **évoluer** une quantité d'un **taux** $\boldsymbol{t_1}$ puis d'un **taux** $\boldsymbol{t_2}$ revient à multiplier cette quantité par

.....................................................

Soit $y_1$ et $y_2$ deux valeurs d'une même grandeur. Définir « l'**indice de base 100** de cette grandeur correspondant à $y_1$ » c'est associer à $y_1$ le nombre $I_1 = 100$ et à $y_2$ le nombre $I_2$ tel que $I_1$ et $I_2$ sont proportionnels à $y_1$ et $y_2$.

### *Exercice*

*Les questions sont indépendantes*

1. Le prix d'un article est passé en un mois de 28 € à 29,54 €.
   Déterminer le taux d'évolution de cet article.
2. Le prix d'une matière première a augmenté de 150 %. Il a été multiplié par ..................................
3. Un prix a été multiplié par 0,75. Il a subi une baisse de ........................
4. Deux augmentations successives de 10 % correspondent à une augmentation de .......... %
5. Le prix d'un article toutes taxes comprises (TTC) est le prix hors taxes (HT) augmenté de la TVA.
   Le prix TTC d'un article est 150 €. Déterminer son prix HT avec une TVA de 20 %.

## Suites

### *définitions*

La suite $(U_n)$ est croissante $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\; U_{n+1} - U_n$ ......
La suite $(U_n)$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\; U_{n+1} - U_n$ ......
La suite $(U_n)$ est constante $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\; U_{n+1} - U_n$ ......

La suite $(U_n)$ est monotone lorsqu'elle est soit ............................ soit ............................

La suite $(U_n)$ n'est pas monotone lorsqu'elle n'est ni ............................ ni ............................

Une suite $(U_n)$ est arithmétique $\Leftrightarrow$ $U_0$ est donné et $\forall\, n \in \mathbb{N},\; U_{n+1} =$ ................. avec $r$ une constante

Une suite $(U_n)$ est géométrique $\Leftrightarrow$ $U_0$ est donné et $\forall\, n \in \mathbb{N},\; U_{n+1} =$ ................. avec $q$ une constante

### *expression du terme général*

$(U_n)$ est arithmétique de 1er terme $U_0$ et de raison $r \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\; U_n =$ .........................

$(U_n)$ est géométrique de 1er terme $U_0$ et de raison $q \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\; U_n =$ .........................

## Exercice 1

1. On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_n = \frac{4-n}{n+3}$
   Calculer $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ et $u_{100}$.

2. On considère la suite $(v_n)$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; v_n = n + (-1)^n$.
   Calculer $v_0$ , $v_1$ , $v_2$ et $v_{100}$.

3. On considère la suite $(w_n)$ définie par : $\begin{cases} w_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\; w_{n+1} = 2\, w_n + 1 \end{cases}$
   Calculer $w_1$ , $w_2$ et $w_3$.

4. On considère la suite $(t_n)$ définie par : $\begin{cases} t_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 1 ,\, t_{n+1} = t_n + \frac{1}{n} \end{cases}$
   Calculer $t_2$ , $t_3$ et $t_4$.

## Exercice 2

On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
        A prend la valeur 2
Traitement
        Pour k allant de 1 à 10
                A prend la valeur −3 × A + 4
        Fin Pour
Sortie
        Afficher A
```

1. Compléter le tableau ci-dessous donnant l'état des variables au cours du traitement de l'algorithme.

| Valeurs de $k$ | | 1 | ... | ... | ... | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs de $A$ | 2 | ... | ... | ... | ... | |

2. Après avoir défini la suite dont il s'agit, expliquer précisément ce qu'affiche cet algorithme.
3. On veut modifier cet algorithme pour qu'il affiche tous les termes de cette suite (excepté le terme initial) jusqu'au terme dont le rang est saisi par l'utilisateur. Ecrire ce nouvel algorithme.

### *Exercice 3*

Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -15$ et de raison $r = 3$

1. Calculer $u_1$ puis $u_2$ .
2. Donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer $u_{2014}$.

### *Exercice 4*

Tous les cinq ans, on effectue un relevé de la population d'une ville.

En 2000, ce relevé a donné 125 milliers d'habitants.

Les relevés suivants montrent une augmentation régulière de 3 % (sur une période de cinq ans).

Soit $r_n$ la valeur (en milliers d'habitants) du relevé de rang $n$.

$r_0$ est donc la valeur relevée en 2000 : $r_0 = 125$ ; $r_1$ est la valeur relevée en 2005…..

1. Calculer $r_1$ et $r_2$ (arrondir à $10^{-3}$).
2. 
   a. Exprimer $r_{n+1}$ en fonction de $r_n$.
   b. En déduire la nature de la suite $(r_n)$ en précisant le premier terme et la raison.
3. Exprimer $r_n$ en fonction de $n$.
4. Si cette évolution se poursuit, quelle population peut-on prévoir pour l'an 2030 ? (arrondir à $10^{-3}$).
5. En utilisant la calculatrice, déterminer le rang du relevé pour lequel la population dépasse pour la 1ère fois 175 milliers d'habitants. En déduire l'année correspondante.

### *Probabilités*

Soit A et B deux événements. Soit $\overline{\mathrm{A}}$ l'événement contraire de A.

$P(\overline{\mathrm{A}}) =$ ……………………………………………… $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) =$ ………………………………………………

### *Loi binomiale*

Une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ est une expérience aléatoire n'ayant que ……………. issues possibles appelées …………………… et …………………… , notées $S$ et $\bar{S}$ avec $P(S) = p$

On considère un schéma de Bernoulli, qui est la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli de paramètres $p$ …………………………… et ……………………………

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de succès.

On dit que $X$ suit la loi ……………………………….. de paramètres …… et …… , on note $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$

Dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli à $n$ épreuves, le nombre de chemins menant à $k$ succès est appelé ……………………………………………. noté $\binom{n}{k}$ qu'on lit …………………………

$P(X = k) =$…………………………………

L'espérance de $X$ est $E(X) =$ ……………… elle représente le nombre …………………… de succès.

La représentation graphique de la loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ est un ……………………………………………… avec en abscisses $k$ allant de 0 à $n$ et en ordonnées $P(X = k)$.

## *Exercice 1*

Une urne contient 6 billes vertes et 4 billes rouges, indiscernables au toucher.

On tire successivement, et avec remise, trois billes de l'urne.

**1.** Représenter cette expérience par un arbre pondéré.

**2.** Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de billes vertes obtenues.

- **a.** Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres $n$ et $p$.
- **b.** Dresser un tableau donnant la loi de probabilité de $X$.
- **c.** Calculer son espérance $E(X)$.
- **d.** Donner une interprétation du résultat de $E(X)$.
- **e.** Représenter graphiquement la loi de $X$ dans un repère orthogonal avec en abscisses 1 cm pour 1 bille verte et en ordonnées 1 cm pour $\frac{10}{125} = 0{,}08$

## *Exercice 2*

Chez un fabricant de calculatrices, une étude a montré que 10 % des produits ont un défaut.

Lors de la commande groupée, le lycée a commandé un lot de 150 calculatrices.

Les probabilités que ces calculatrices aient des défauts sont indépendantes.

On définit la variable aléatoire $X$ donnant le nombre de calculatrices défectueuses.

**1.** Justifier que $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}1$.

**2.** $E(X) = \ldots$ ☐ 10 ☐ 13,5 ☐ 15 ☐ 67,5 ☐ 75 ☐ 150

***QCM*** ( choisir la (les) bonne(s) réponse(s) et compléter les pointillés en arrondissant à $10^{-4}$ )

**3.** La probabilité qu'exactement 10 calculatrices soient défectueuses est égale à ....................

☐ $0{,}1^{10}$
☐ $\binom{150}{10}\, 0{,}1^{10}$
☐ $0{,}1^{10} \times 0{,}9^{140}$
☐ $\binom{150}{10}\, 0{,}1^{10} \times 0{,}9^{140}$

**4.** $P(X \geq 15) \simeq$ ....................

☐ $1 - P(X < 14)$
☐ $1 - P(X \leq 15)$
☐ $1 - P(X \leq 14)$
☐ $1 - P(X < 15)$

**5.** $P(X > 20) \simeq$ ....................

☐ $1 - P(X < 20)$
☐ $1 - P(X \leq 19)$
☐ $1 - P(X \leq 20)$
☐ $1 - P(X \leq 21)$

**6.** La probabilité qu'au plus 10 calculatrices soient défectueuses dans ce lot est égale à ....................

☐ $P(X > 10)$
☐ $P(X < 10)$
☐ $P(X \leq 10)$
☐ $P(X \geq 11)$

**7.** La probabilité qu'il ait plus de 10 calculatrices défectueuses dans ce lot est égale à ....................

☐ $P(X > 10)$
☐ $P(X < 10)$
☐ $P(X \leq 10)$
☐ $P(X \geq 11)$

**8.** La probabilité qu'il y ait de 11 à 18 calculatrices défectueuses dans ce lot est égale à ....................

☐ $P(11 \leq X \leq 18)$
☐ $P(X \leq 18) - P(X \leq 11)$
☐ $P(X \leq 18) - P(X < 11)$
☐ $P(X \leq 18) + P(X \geq 11)$

### Exercice 3

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres de deux catégories : des conifères et des feuillus.
Le stock comporte 52,5 % de conifères. Les autres sont des feuillus.
On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie.
On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
*Arrondir les résultats à* $10^{-3}$

1. Justifier que $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
3. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux feuillus ?

### Intervalle de fluctuation de 2nde

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est $p$.
On considère un échantillon de taille $n$.
On observe que le caractère est présent dans cet échantillon avec une fréquence égale à $f$.
Lorsque $\boldsymbol{n \geq 25}$ et $\mathbf{0,2 \leq \boldsymbol{p} \leq 0,8}$ alors il y a environ 95% des échantillons de taille $n$ qui sont tels que la fréquence $f$ appartient à un intervalle $I$ de fluctuation au seuil de 95 % où

$$I = \left[p - \frac{\dots}{\sqrt{\dots}} \ ; \ p + \frac{\dots}{\sqrt{\dots}}\right]$$

### Intervalle de fluctuation de 1ère ES

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'individus ayant le caractère dans l'échantillon de taille $n$.
On peut considérer que $X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ p)$.
Un intervalle $I$ de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 % est $I = \left[\frac{a}{n}\ ;\ \frac{b}{n}\right]$
Avec $a$ le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ et $b$ le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$

*Prise de décision*

Si $f \notin I$ alors on rejette l'hypothèse
Si $f \in I$ alors on ne rejette pas l'hypothèse

### Exercice

Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau médicament contre le mal des transports est efficace sur les trois-quarts des malades habituels. Une association indépendante collecte des données auprès de personnes habituellement malades. Sur 57 personnes, 50 n'ont pas été malades à la suite de la prise du médicament. Que peut-on dire de l'affirmation du laboratoire pharmaceutique ?

*avec l'intervalle de fluctuation de 2nde* *résultats à* $10^{-4}$

$n = \dots\dots \qquad p = \dots\dots\dots\dots \qquad f = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \simeq \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$I = \left[\dots\dots\dots\dots - \frac{\dots}{\sqrt{\dots\dots}} \ ; \dots\dots\dots\dots + \frac{\dots}{\sqrt{\dots\dots}}\right] \simeq [\dots\dots\dots\dots\dots \ ; \dots\dots\dots\dots\dots]$$

$f$ … … $I$ donc ………………………………………………………………………………………..

*avec l'intervalle de fluctuation de 1ère ES*

On choisit au hasard et de façon indépendante 57 personnes habituellement malades ayant pris le médicament. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de personnes pas malades dans cet échantillon de 57 personnes. Sous l'hypothèse selon laquelle le médicament est efficace sur les trois-quarts des malades habituels, on a $X \sim \mathcal{B}(\dots\dots\ ;\dots\dots\dots\dots)$
A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice,
le plus petit entier $a$ tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est $a = \dots\dots\dots$
le plus petit entier $b$ tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est $b = \dots\dots\dots$

donc $I = \left[\frac{\dots\dots}{\dots\dots}\ ;\ \frac{\dots\dots}{\dots\dots}\right]$
$\simeq [\dots\dots\dots\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots\dots\dots]$

$f$ … … $I$ donc ………………………………………………………………………………………..