Mathématiques

préparation
à la Terminale STMG

Le programme de Terminale STMG **s'appuie** sur les notions étudiées en 1ère STMG. L'**acquisition des bases** de 1ère est donc **essentielle** à la réussite en Terminale.

Pour faciliter le **travail personnel de révisions** en fin de vacances, ce fichier contient des résultats de **cours à compléter et à connaître** et des **exercices d'application**.

Une semaine avant la rentrée, une correction succincte des exercices sera mise en ligne sur l'ENT.

Notations

$\in$: « appartient à » , symbole utilisé entre un élément et un ensemble

$\cap$: ....

$\cup$: ....

Ensembles de nombres

$\emptyset$ est l'ensemble vide

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres ....

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres ....

Fractions (écrire sous la forme d'une seule fraction)

Pour tous réels a, b, c et d non-nuls

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\cdots$ | $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\cdots$ | $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\cdots$

Calculer sans calculatrice (puis vérifier à la calculatrice)

$A=\frac{2}{3}+5=\cdots$ | $B=\frac{2}{3}\times 5=\cdots$ | $C=\frac{2}{3}\div 5=\cdots$

$D=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\cdots$ | $E=3\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{7}\right)=\cdots$ | $F=\dfrac{1+\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{5}}=\cdots$

Puissances

Pour tous réels a et b non-nuls. Pour tous entiers naturels n et p.

$a^0=...$

$a^1=...$

$a^{-n}=\cdots$

$a^n\times a^p=...$

$\frac{a^n}{a^p}=\cdots$

$(a^n)^p=...$

$(a\times b)^n=...$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\cdots$

Formes d'une expression algébrique

Les identités remarquables

$(a+b)^2=...$

$(a-b)^2=...$

$(a-b)(a+b)=...$

ne pas confondre

$a\times(b+c)=...$

$a\times(b-c)=...$

$a\times(b\times c)=...$

ne pas confondre

$x\times x\times x=...$

$x+x+x=...$

Compléter

$x^2+6x+\ ...=(x+\ ...)^2$

$x^2-2x+\ ...=(x-\ ...)^2$

$x^2+\ ...\ +\ ...=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

$x^2-7x+\ ...=(x-\ ...)^2$

Racines carrées

Pour tous a et b positifs

$\sqrt{a\times b}=...$ | si $b\neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\ ...$ | $\left(\sqrt{a}\right)^2=\ ...$

Equations

$\Leftrightarrow$ signifie « est équivalent à »

$A(x) \times B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \;\ldots\; B(x) = 0$

$\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) \;\ldots\; 0 \;\ldots\; B(x) \;\ldots\; 0$

Pour tout réel a

Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution dans $\mathbb{R}$ qui est $x = \ldots$

Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont $x = \ldots$ et $x = \ldots$

Soit a, b, c et d quatre réels avec b et d non-nuls. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Leftrightarrow$ ....

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$x^2 = 8$	$x^2 = -25$	$(x-1)^2 = 0$	$\dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{4-x}{2}$

Inéquation

QCM

1°) Lorsqu'on **ajoute** un même nombre k aux deux membres d'une inéquation, alors le sens de l'inéquation

☐ change si ....

☐ ne change pas

2°) Lorsqu'on **multiplie** par un même nombre $k \neq 0$ les deux membres d'une inéquation, alors le sens de l'inéquation

☐ change si ....

☐ ne change pas

3°) Lorsqu'on **soustrait** un même nombre k aux deux membres d'une inéquation, alors le sens de l'inéquation

☐ change si ....

☐ ne change pas

4°) Lorsqu'on **divise** par un même nombre $k \neq 0$ les deux membres d'une inéquation, alors le sens de l'inéquation

☐ change si ....

☐ ne change pas

Signe d'une expression

QCM (une seule bonne réponse)

1°) Le produit de deux facteurs négatifs est

☐ négatif

☐ positif

☐ ça dépend des facteurs

2°) Le produit de deux facteurs positifs est

☐ négatif

☐ positif

☐ ça dépend des facteurs

3°) Le produit de deux facteurs de signes contraires est

☐ négatif

☐ positif

☐ ça dépend des facteurs

4°) La somme de deux termes négatifs est

☐ négative

☐ positive

☐ ça dépend des termes

5°) La somme de deux termes positifs est

☐ négative

☐ positive

☐ ça dépend des termes

6°**)** La somme de deux termes de signes contraires est

☐ négative

☐ positive

☐ ça dépend des termes

Pour tous a et b réels avec $a \neq 0$, l'expression $\boldsymbol{ax+b}$ s'annule pour $x = \ldots$

x	$-\infty$		...		$+\infty$
Signe de $ax+b$		...	0	...	

Pour tous a, b et c réels avec $a \neq 0$, l'expression $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ est appelé trinôme (polynôme) du 2nd degré

Son discriminant $\Delta =$ ....

- Si .... alors ax^2+bx+c n'admet aucune racine
- Si .... alors ax^2+bx+c admet une seule racine (double) $x_0 = \ldots$
- Si .... alors ax^2+bx+c admet deux racines distinctes $x_1 = \ldots$ $x_2 = \ldots$

Si Δ ......

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		...	

Si Δ ......

x	$-\infty$		...		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		...	0	...	

Si Δ ......

x	$-\infty$		...		...		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		...	0	...	0	...	

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x(x+1)(3-x)$

1. A l'aide de la calculatrice, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$

   Donner la fenêtre d'affichage utilisée.
2. A l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de $f(x)$.
3. Vérifier le résultat de la question **1.**

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (à l'aide d'un tableau de signes) :

a. $(3x-6)(-x^2-4x+45) < 0$

b. $\dfrac{9x^2-6x+1}{2-x} \leq 0$

c. $\dfrac{-3x}{x^2-5x-6} \geq 0$

Exercice 3

1. Soit B la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par $B(x) = -x^2+60x-500$.

   Résoudre dans l'intervalle $[0\,;60]$ l'inéquation $B(x) > 0$
2. Un artisan fabrique des vases. Il estime que le bénéfice, en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x vases, est donné par la fonction B.
   - **a.** Pour quelle(s) quantité(s) de vases vendus l'artisan fait-il un bénéfice ?
   - **b.** Pour quelle(s) quantité(s) de vases vendus l'artisan fait-il un bénéfice de 300 € ?

Equations de droite

On se place dans un repère.

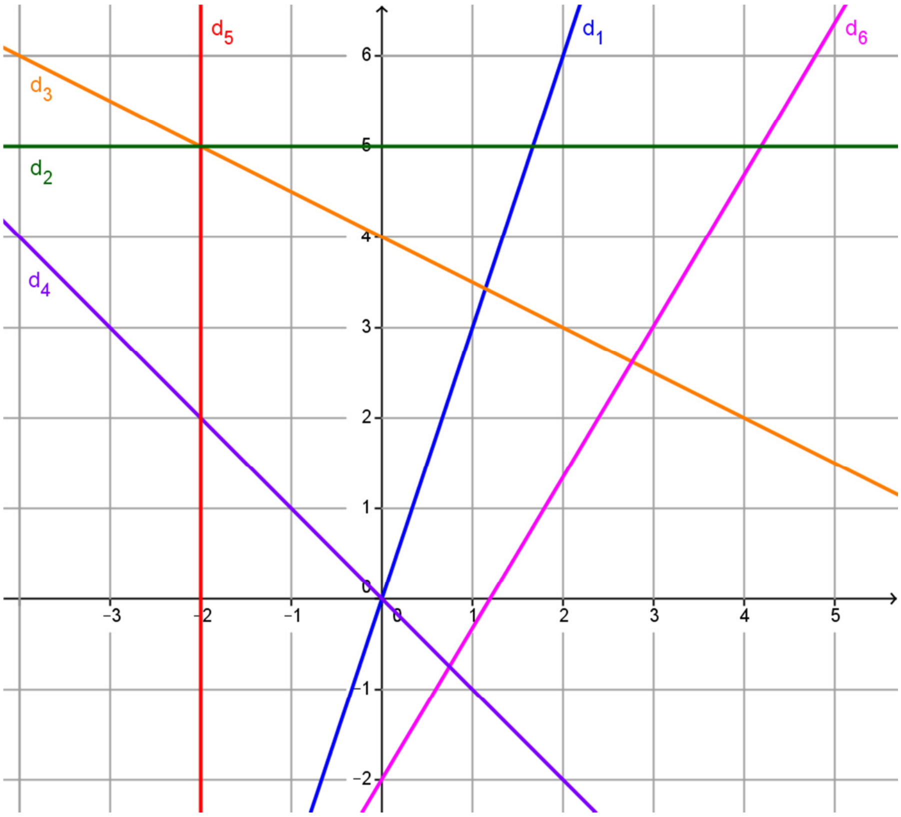
Soit d une droite d'équation $y = mx + p$

m est appelé .... et p est appelé ....

On considère les points $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$.

Si $x_A \neq x_B$ alors le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à ....

Exercice



Par lecture graphique, donner une équation de chacune des droites d_1 à d_6

d_1 : ....

d_2 : ....

d_3 : ....

d_4 : ....

d_5 : ....

d_6 : ....

Dans le repère ci-contre, tracer les droites d_7 à d_9 telles que

d_7 : $y = 3x - 1$

d_8 : $y = -\dfrac{3}{4}x + 6$

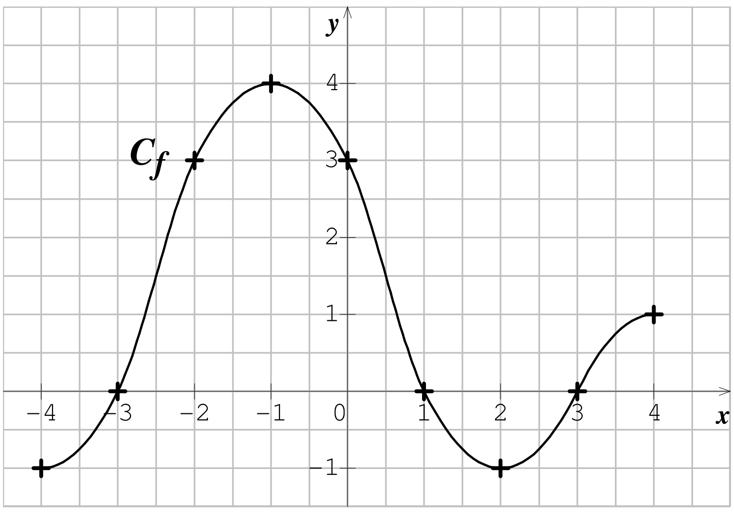
d_9 : $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$

Etude de fonction

Exercice

Soit f la fonction dont la représentation graphique C_f est donnée ci-dessous.

Par lecture graphique, répondre aux questions ci-dessous.



L'ensemble de définition de la fonction f est

.... ;

$f(0{,}5) =$ .... ; $f(4) =$ .... ;

L'image de 0 par la fonction f est .... ;

.... a pour image 4 par la fonction f ;

$f(x) = 3$ a pour solution

.... ;

$f(x) > 0$ a pour solution

.... ;

Le minimum de la fonction f est .... ;   Le maximum de la fonction f est ....

Dresser le tableau de variations et le tableau de signes de la fonction f.

Dérivation

Si la fonction f est dérivable en a alors le nombre dérivé de la fonction f en a est le réel $f'(a)$ tel que

graphiquement, $f'(a)$ est le .... de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

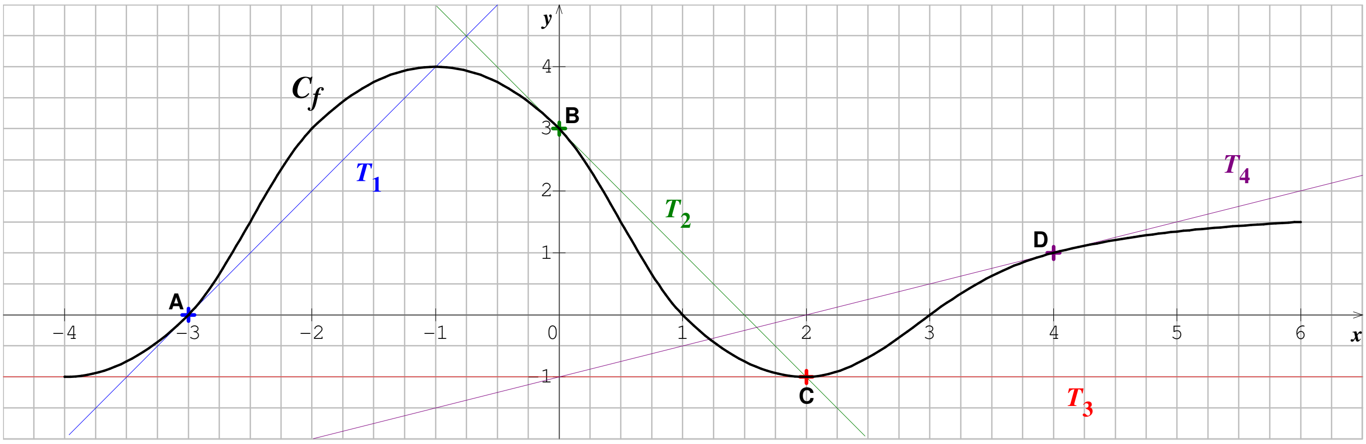
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation ....

Remarque : le point de la courbe de f d'abscisse a a pour coordonnées (......... ; ....)

Lecture graphique

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-4\,;6]$ dont la représentation graphique $\boldsymbol{C_f}$ est donnée ci-dessous.

Les droites $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$ et $\boldsymbol{T_4}$ sont les tangentes à C_f aux points $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$.



Par lecture graphique,

T_1 a pour équation	$f(-3) =$	$f(2) =$ ....
T_2 a pour équation	$f'(-3) =$	$f'(2) =$ ....
T_3 a pour équation	$f(0) =$	$f(4) =$ ....
T_4 a pour équation	$f'(0) =$	$f'(4) =$ ....

Fonctions de référence

Fonction f	f est définie et dérivable sur	Fonction dérivée f'
$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ldots$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ldots$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ldots$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ldots$
$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels tels que $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ldots$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d des réels tels que $a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \ldots$

Utilisation de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction f est croissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout réel x de I, on a $f'(x)$.........

La fonction f est décroissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout réel x de I, on a $f'(x)$.........

Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. ***Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.***
2. ***Dresser le tableau de variations de la fonction f.***

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ | $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

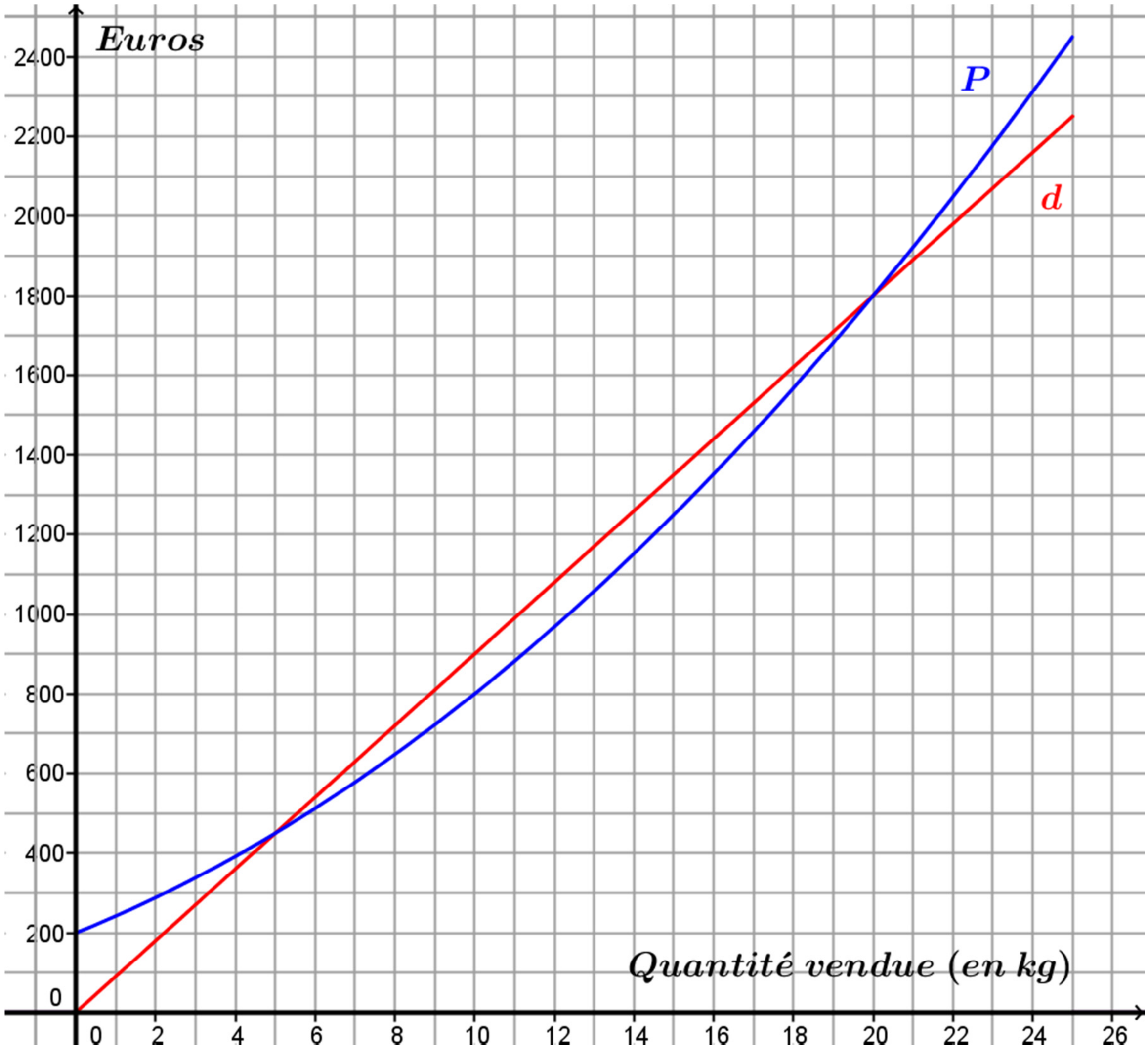
Optimisation

Dans une usine de produits cosmétiques, le coût de fabrication journalier d'un crème est donné (en euros) par : $C(x) = 2x^2 + 40x + 200$, où x est la quantité en kilogrammes, pour $x \in [0\,;25]$.

Le prix de vente est de 90 € le kilo et on suppose que toute la production de l'entreprise est vendue.

La recette, en fonction de x kilogrammes de produits vendus, est notée $R(x)$.

La représentation P de la fonction C et la représentation d de la fonction R sont données ci-dessous.



1. Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de la quantité x de produits vendus.
2. Démontrer que ce bénéfice est de 72 € pour 8 kilogrammes vendus.
3. Démontrer, par le calcul, que $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [5\,;20]$
4. Donner la quantité de produits que l'entreprise doit vendre pour réaliser des bénéfices.
5. Expliquer comment le résultat de la question précédente peut être vérifié graphiquement.
6. Calculer $B'(x)$.
7. Dresser le tableau de variations de B sur l'intervalle $[0\,;25]$.
8. En déduire la production qui génèrera le meilleur bénéfice pour cette entreprise et calculer ce bénéfice.

Arrondir

La valeur arrondie au dixième de 1928,374567 est ……………………………..

La valeur arrondie à l'unité de 1928,374567 est ……………………………..

La valeur arrondie au millième de 1928,374567 est ……………………………..

La valeur arrondie à la centaine de 1928,374567 est ……………………………..

La valeur arrondie au centième de $\sqrt{2}$ est ……………..

La valeur arrondie à 10^{-3} de $1{,}25^6$ est …………………

Pourcentages

Le **taux d'évolution** d'une valeur y_1 à une valeur y_2 est $T =$ ………………………………………..

Augmenter une quantité de x % revient à multiplier cette quantité par ……………………………..

Diminuer une quantité de x % revient à ………………………………………………………………………

Faire **évoluer** une quantité d'un **taux t** revient à multiplier cette quantité par ………………………..

Faire **évoluer** une quantité d'un **taux t_1** puis d'un **taux t_2** revient à multiplier cette quantité par

……………………………………………..

Soit y_1 et y_2 deux valeurs d'une même grandeur. Définir « l'**indice de base 100** de cette grandeur correspondant à y_1 » c'est associer à y_1 le nombre $I_1 = 100$ et à y_2 le nombre I_2 tel que I_1 et I_2 sont proportionnels à y_1 et y_2.

Exercice

Les questions sont indépendantes

1. Le prix d'un article est passé en un mois de 28 € à 29,54 €.
   Déterminer le taux d'évolution de cet article.
2. Le prix d'une matière première a augmenté de 150 %. Il a été multiplié par ……………………………..
3. Un prix a été multiplié par 0,75. Il a subi une baisse de ……………………..
4. Deux augmentations successives de 10 % correspondent à une augmentation de ………. %
5. Le prix d'un article toutes taxes comprises (TTC) est le prix hors taxes (HT) augmenté de la TVA.
   Le prix TTC d'un article est 150 €. Déterminer son prix HT avec une TVA de 20 %.

Statistiques

Exercice 1

Le tableau suivant donne les âges des membres d'un club de sport.

Age (ans)	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	5	6	7	9	8	6	4	3
Effectifs								

Déterminer la moyenne, la médiane et les quartiles de cette série.

Exercice 2

Dans une entreprise, la répartition des salaires est donnée par le tableau suivant.

Salaire (euros)	]1000 ; 2000]	]2000 ; 3000]	]3000 ; 4000]	]4000 ; 6000]
Pourcentage	19 %	43 %	26 %	12 %

Calculer la moyenne de cette série.

Suites

définitions

La suite (U_n) est croissante ⇔ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n$ ......
La suite (U_n) est décroissante ⇔ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n$ ......

Une suite (U_n) est arithmétique ⇔ U_0 est donné et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} =$ .... avec r une constante

Une suite (U_n) est géométrique ⇔ U_0 est donné et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} =$ .... avec q une constante

expression du terme général

(U_n) est arithmétique de 1er terme U_0 et de raison r ⇔ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n =$ ....

(U_n) est géométrique de 1er terme U_0 et de raison q ⇔ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n =$ ....

Exercice 1

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -15$ et de raison $r = 3$

1. Calculer u_1 puis u_2 .
2. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
3. Calculer u_{2014}.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 125$ et de raison $q = 1{,}03$

1. Calculer u_1 puis u_2 (arrondir à 10^{-3}).
2. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{10}.
4. En utilisant la calculatrice, déterminer le rang du relevé pour lequel u_n dépasse pour la 1ère fois 200.

Probabilités

Soit A et B deux événements. Soit $\overline{\mathrm{A}}$ l'événement contraire de A.

$P(\overline{\mathrm{A}}) =$ .... $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) =$ ....

Loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire n'ayant que .... issues possibles appelées .... et .... , notées S et $\bar{S}$ avec $P(S) = p$

On considère un schéma de Bernoulli, qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètres p .... et ....

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès.

On dit que X suit la loi .... de paramètres ...... et ...... , on note $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$

L'espérance de X est $E(X) =$ .... elle représente le nombre .... de succès.

Exercice 1

Chez un fabricant de calculatrices, une étude a montré que 10 % des produits ont un défaut.
Lors de la commande groupée, le lycée a commandé un lot de 150 calculatrices.
Les probabilités que ces calculatrices aient des défauts sont indépendantes.
On définit la variable aléatoire X donnant le nombre de calculatrices défectueuses.

1. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}1$.

2. La probabilité qu'exactement 10 calculatrices soient défectueuses est égale à ....

3. $E(X) = ...$ ☐ 10 ☐ 13,5 ☐ 15 ☐ 67,5 ☐ 75 ☐ 150

QCM (choisir la (les) bonne(s) réponse(s) et compléter les pointillés en arrondissant à 10^{-4})

4. $P(X \geq 15) \simeq$ ....

☐ $1 - P(X < 14)$
☐ $1 - P(X \leq 15)$
☐ $1 - P(X \leq 14)$
☐ $1 - P(X < 15)$

5. $P(X > 20) \simeq$ ....

☐ $1 - P(X < 20)$
☐ $1 - P(X \leq 19)$
☐ $1 - P(X \leq 20)$
☐ $1 - P(X \leq 21)$

6. La probabilité qu'au plus 10 calculatrices soient défectueuses dans ce lot est égale à ....

☐ $P(X > 10)$
☐ $P(X < 10)$
☐ $P(X \leq 10)$
☐ $P(X \geq 11)$

7. La probabilité qu'il y ait de 11 à 18 calculatrices défectueuses dans ce lot est égale à ....

☐ $P(11 \leq X \leq 18)$
☐ $P(X \leq 18) - P(X \leq 11)$
☐ $P(X \leq 18) - P(X < 11)$
☐ $P(X \leq 18) + P(X \geq 11)$

Intervalle de fluctuation de 2nde

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est p.
On considère un échantillon de taille n.
On observe que le caractère est présent dans cet échantillon avec une fréquence égale à f.
Lorsque $\boldsymbol{n \geq 25}$ et $\boldsymbol{0{,}2 \leq p \leq 0{,}8}$ alors il y a environ 95% des échantillons de taille n qui sont tels que la fréquence f appartient à un intervalle I de fluctuation au seuil de 95 % où

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Prise de décision

Si $f \notin I$ alors on rejette l'hypothèse
Si $f \in I$ alors on ne rejette pas l'hypothèse

Exercice

Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau médicament contre le mal des transports est efficace sur les trois-quarts des malades habituels. Une association indépendante collecte des données auprès de personnes habituellement malades. Sur 57 personnes, 50 n'ont pas été malades à la suite de la prise du médicament. Que peut-on dire de l'affirmation du laboratoire pharmaceutique ?

avec l'intervalle de fluctuation de 2nde *résultats à* 10^{-4}

$n = \dots\dots$ $p = \dots\dots\dots\dots$ $f = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \simeq \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$I = \left[\dots\dots\dots\dots - \frac{\dots}{\sqrt{\dots\dots}} \; ; \dots\dots\dots\dots + \frac{\dots}{\sqrt{\dots\dots}}\right] \simeq [\dots\dots\dots\dots\dots \; ; \dots\dots\dots\dots\dots]$

$f \dots\dots I$ donc ....