Mathématiques

préparation à la Terminale S

Le programme de Terminale S est **chargé** et est la **continuité** de celui de **1ère S**.

Les **nouvelles notions** sont **nombreuses** et le **rythme** de progression est **rapide**.

Les **bases de 1ère S** ne seront donc que très rapidement reprises au fil des chapitres.

C'est pourquoi il est impératif d'être **prêt le jour de la rentrée**.

Pour faciliter le **travail personnel de révisions** en fin de vacances, ce fichier contient des résultats de cours à compléter et à connaître et des exercices d'application.

Une semaine avant la rentrée, une correction succincte des exercices sera mise en ligne sur l'ENT.

Notations

$\forall$ signifie « pour tout »

$\in$: « appartient à » , symbole utilisé entre un élément et un ensemble

$\subset$: .... , symbole utilisé entre deux ensembles

$\cap$: ....

$\cup$: ....

Ensembles de nombres

$\emptyset$ est l'ensemble vide

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres ....

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres ....

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres ....

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres ....

$\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres ....

$\mathbb{R}^{-*}$ est l'ensemble des nombres ....

QCM

(plusieurs réponses possibles)

1°) $\mathbb{N} \cap [-2; 2] = ...$

☐ $\{2\}$

☐ $\{1 ; 2\}$

☐ $\{0 ; 1 ; 2\}$

☐ $[0; 2]$

2°) $-3^2 \in ...$

☐ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{Z}$

3°) $(-3)^2 \in ...$

☐ $\mathbb{N}$

☐ $\mathbb{Z}$

4°) Si $x \in \mathbb{R}^+$ alors

☐ $x \in \mathbb{N}$

☐ $x \in \mathbb{R}$

5°) Si $x \in \mathbb{R}^+$, alors

☐ $x \geq 0$

☐ $x > 0$

6°) $n \in \mathbb{N}^*$ signifie

☐ n entier positif

☐ n entier et $n \geq 1$

7°) Si $x \in \mathbb{R}^{-*}$, alors

☐ $x < 0$

☐ $x \leq -1$

8°) $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = ...$

☐ $\emptyset$

☐ $\mathbb{R}$

☐ $\{0\}$

9°) $\mathbb{N} \subset ...$

☐ $\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{R}^{+*}$

Fractions (écrire sous la forme d'une seule fraction)

Pour tous réels a, b, c et d non-nuls

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \cdots$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \cdots$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \cdots$

$\frac{a}{b} + c = \cdots$

$\frac{a}{b} \times c = \cdots$

$\frac{a}{b} : c = \cdots$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \cdots$

$\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \cdots$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \cdots$

$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \cdots$

Calculer sans calculatrice (puis vérifier à la calculatrice)

$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$B = 3\left(\frac{2}{5} - \frac{6}{7}\right)$

$C = \dfrac{\frac{1}{2}}{3} - \dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

$D = \dfrac{1 + \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{5}}$

Puissances

Pour tous réels a et b non-nuls. Pour tous entiers naturels n et p.

$a^0 = ...$

$a^1 = ...$

$a^{-n} = \cdots$

$a^n \times a^p = ...$

$\frac{a^n}{a^p} = \cdots$

$(a^n)^p = ...$

$(a \times b)^n = ...$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \cdots$

Vrai / Faux (sans calculatrice, cocher les égalités vraies)

☐ $5^{-2} = 0{,}05$

☐ $2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} = 0{,}023$

☐ $5^3 + 5^{-7} = 5^{-4}$

☐ $5^3 + 5^{-7} = 10^{-4}$

☐ $5^3 \times 5^{-7} = 5^{-4}$

☐ $5^3 \times 5^{-7} = 5^{-21}$

☐ $(5^3)^{-7} = 5^{-21}$

☐ $(5^3)^{-7} = 5^{-4}$

☐ $\frac{5^3}{5^{-7}} = 5^{10}$

☐ $\frac{5^3}{5^{-7}} = 5^{-4}$

☐ $5^3 + 2^3 = 7^3$

☐ $5^3 \times 2^3 = 10^3$

☐ $\frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$

☐ $(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$

☐ $(3 + 4)^2 = 3^2 + 4^2$

☐ $\frac{1}{3^4} = -3^4$

Valeur absolue

$|x| = \begin{cases} \dots & \text{si } x \dots \\ \dots & \text{si } x \dots \end{cases}$

Ecrire sans la valeur absolue (puis vérifier à la calculatrice)

$A = |-7|$; $B = |\pi - 1|$; $C = |1 - \sqrt{2}|$

Compléter

$|x| = 5 \iff x \in \dots\dots\dots\dots\dots$ | $|x - 0{,}1| = 5 \iff x \in \dots\dots\dots\dots\dots$ | $|x| < 5 \iff x \in \dots\dots\dots\dots\dots$

Formes d'une expression algébrique

Les identités remarquables

$(a + b)^2 = \dots$

$(a - b)^2 = \dots$

$(a - b)(a + b) = \dots$

ne pas confondre

$a \times (b + c) = \dots$

$a \times (b - c) = \dots$

$a \times (b \times c) = \dots$

ne pas confondre

$x \times x \times x = \dots$

$x + x + x = \dots$

Racines carrées

Pour tous a et b positifs

$\sqrt{a \times b} = \dots$

si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dots$

ne pas confondre

$\forall\, x \in \dots$ on a $\left(\sqrt{x}\right)^2 = \dots$

$\forall\, x \in \dots$ on a $\sqrt{x^2} = \dots$

Donner la valeur exacte sans la racine carrée

$A = \sqrt{(-7)^2} = \dots.\dots\dots\dots\dots$ $B = \sqrt{(5 - \pi)^2} = \dots.\dots\dots\dots\dots$ $C = \sqrt{(6 - 2\pi)^2} = \dots.\dots\dots\dots\dots$

Ecrire sans la racine carrée au dénominateur puis simplifier (sans utiliser la calculatrice)

$A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $B = \dfrac{6 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ $C = \dfrac{1 + 3\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ $D = \dfrac{3\sqrt{2} - 4}{3\sqrt{2} + 4}$

QCM pour tout a réel positif

1°) $\left(\sqrt{a} + 1\right)^2 - \left(\sqrt{a} - 1\right)^2 = \cdots$

☐ $4\sqrt{a}$
☐ a
☐ 2

2°) $\left(1 - 4\sqrt{a}\right)\left(1 + 2\sqrt{a}\right) = \cdots$

☐ $1 - 8\sqrt{a}$
☐ $1 - 10\sqrt{a}$
☐ $1 - 2\sqrt{a} - 8a$

3°) $\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \cdots$

☐ 12
☐ $5\sqrt{2}$
☐ $2\sqrt{5}$

Equations

$\Leftrightarrow$ signifie « est équivalent à »

$A(x) \times B(x) = 0 \iff A(x) = 0 \;\dots\; B(x) = 0$

$A(x) \times B(x) \neq 0 \iff A(x) \neq 0 \;\dots\; B(x) \neq 0$

$\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) \;\dots\; 0 \;\dots\; B(x) \;\dots\; 0$

Pour tout réel a
Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$
Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution dans $\mathbb{R}$ qui est $x = \dots$
Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont $x = \dots$ et $x = \dots$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1°) $5(2x - 3) = (x - 1)(2x - 3)$

2°) $4x^2 - 1 + x(2x + 1) = 0$

3°) $x^2 - 6x + 9 - 2(x - 3) = 0$

Factoriser numérateur et dénominateur, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante

$$\frac{x(3x - 1) - x(2x + 3)}{16 - x^2} = 0$$

Signe d'une expression

QCM (une seule bonne réponse)

1°) Le produit de deux facteurs négatifs est
☐ négatif
☐ positif
☐ ça dépend des facteurs

2°) Le produit de deux facteurs positifs est
☐ négatif
☐ positif
☐ ça dépend des facteurs

3°) Le produit de deux facteurs de signes contraires est
☐ négatif
☐ positif
☐ ça dépend des facteurs

4°) La somme de deux termes négatifs est
☐ négative
☐ positive
☐ ça dépend des termes

5°) La somme de deux termes positifs est
☐ négative
☐ positive
☐ ça dépend des termes

6°) La somme de deux termes de signes contraires est
☐ négative
☐ positive
☐ ça dépend des termes

Pour tous a et b réels avec $a \neq 0$, l'expression $\boldsymbol{ax+b}$ s'annule pour $x = \ldots$

x	$-\infty$		...		$+\infty$
Signe de $ax+b$		...	0	...	

Pour tous a, b et c réels avec $a \neq 0$, l'expression $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ est appelé trinôme (polynôme) du 2nd degré
Son discriminant $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Si ……………. alors ax^2+bx+c n'admet aucune racine et n'est pas factorisable
- Si ……………. alors ax^2+bx+c admet une seule racine (double) et est factorisable

  $x_0 = \ldots$ $\qquad\qquad$ $ax^2+bx+c = \ldots$
- Si ……………. alors ax^2+bx+c admet deux racines distinctes et est factorisable

  $x_1 = \ldots$ $\qquad\qquad$ $x_2 = \ldots$ $\qquad\qquad$ $ax^2+bx+c = \ldots$

Si Δ ……

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		...	

Si Δ ……

x	$-\infty$		...		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		...	0	...	

Si Δ ……

x	$-\infty$		...		...		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		...	0	...	0	...	

Ecrire sous la forme d'un quotient, puis factoriser éventuellement numérateur et/ou dénominateur, puis étudier le signe du quotient

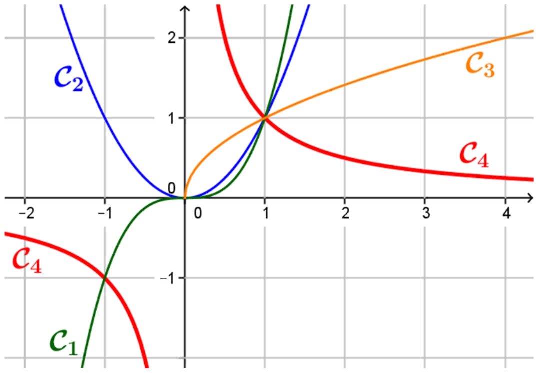
$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1\}\,,\quad f(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} - 9$

$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-2\,;1\}\,,\quad g(x) = \dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{x-2}{x-1}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$-3x(x^2-5x-6)\left(x^2-2\sqrt{3}x+3\right) \geq 0$$

Fonctions de référence



Représentations graphiques

La fonction carré est représentée par la courbe ....

La fonction inverse est représentée par la courbe ....

La fonction cube est représentée par la courbe ....

La fonction racine carrée est représentée par la courbe ....

Sens de variation

Pour tous réels a et b

Si	$0 \leq a < b$	alors	a^2 ... b^2	car la fonction carré est str. .... sur ......
Si	$a < b \leq 0$	alors	a^2 ... b^2	car la fonction carré est str. .... sur ......
Si	$a < b$	alors	a^3 ... b^3	car la fonction cube est str. .... sur ......
Si	$0 \leq a < b$	alors	$\sqrt{a}$ ... $\sqrt{b}$	car la fonction racine carrée est str. .... sur ......
Si	$0 < a < b$	alors	$\frac{1}{a}$ ... $\frac{1}{b}$	car la fonction inverse est str. .... sur ......
Si	$a < b < 0$	alors	$\frac{1}{a}$ ... $\frac{1}{b}$	car la fonction inverse est str. .... sur ......

Utilisation du sens de variation des fonctions de référence

En procédant par étapes successives, comparer

1°) $\dfrac{-3}{a-4}$ et $\dfrac{-3}{b-4}$ pour $a < b < 4$

2°) $1-2(a-3)^3$ et $1-2(b-3)^3$ pour $a < b$

3°) $(6-3a)^2$ et $(6-3b)^2$ pour $2 \leq a < b$

4°) $-2\sqrt{a+5}$ et $-2\sqrt{b+5}$ pour $-5 \leq a < b$

Dérivation

Si le taux d'accroissement $\dfrac{f(\dots\dots\dots)-f(\dots)}{\dots}$ admet une limite finie quand h tend vers 0

Alors la fonction f est dérivable en a et le nombre dérivé de la fonction f en a est le réel $f'(a)$ tel que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\dots\dots\dots)-f(\dots)}{\dots}$$

Graphiquement, $f'(a)$ est le .... de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation : ....

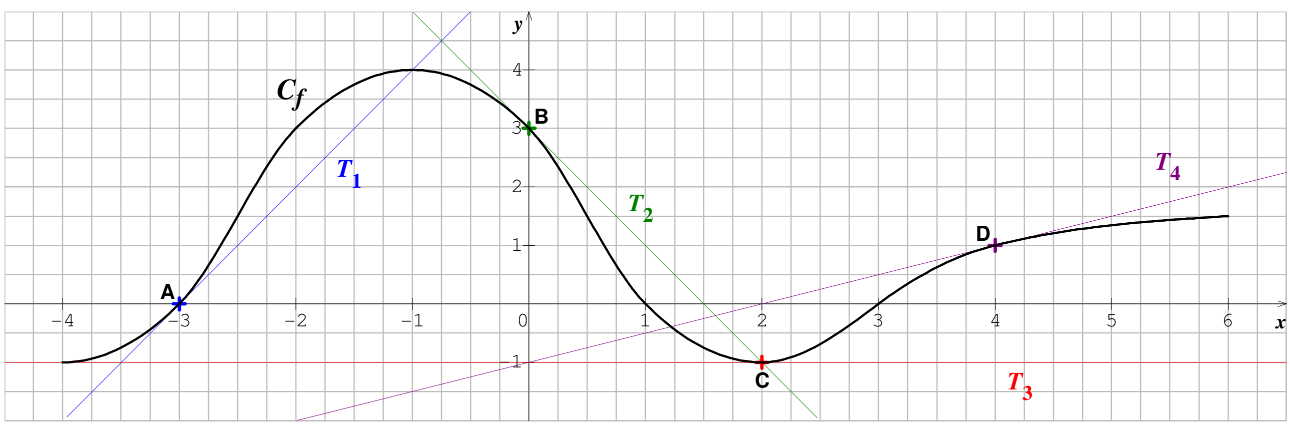
Remarque : le point de la courbe de f d'abscisse a a pour coordonnées (......... ; ....)

Lecture graphique

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-4\,;6]$ dont la représentation graphique $\boldsymbol{C_f}$ est donnée ci-dessous.

Les droites $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$, $\boldsymbol{T_3}$ et $\boldsymbol{T_4}$ sont les tangentes à C_f aux points ***A***, ***B***, ***C*** et ***D***.

Par lecture graphique, donner les équations réduites des droites T_1, T_2, T_3 et T_4 ainsi que les valeurs de $f(-3)$, $f'(-3)$, $f(0)$, $f'(0)$, $f(2)$, $f'(2)$, $f(4)$ et $f'(4)$.



Fonctions de référence

Fonction f	f est définie sur	f est dérivable sur	Fonction dérivée f'
$f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$	…	…	$f'(x) = …$
$f(x) = x$	…	…	$f'(x) = …$
$f(x) = x^2$	…	…	$f'(x) = …$
$f(x) = x^3$	…	…	$f'(x) = …$
$f(x) = x^4$	…	…	$f'(x) = …$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	…	…	$f'(x) = …$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	…	…	$f'(x) = …$
$f(x) = \sqrt{x}$	…	…	$f'(x) = …$

Opérations

Pour tous u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel

$(u + v)' = …$

$(ku)' = …$

$(uv)' = …$

$(u^2)' = …$

Si u ne s'annule pas sur I

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = …$

Si v ne s'annule pas sur I

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = …$

Utilisation de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction f est croissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout réel x de I, on a $f'(x)$………

La fonction f est décroissante sur $I \Leftrightarrow$ pour tout réel x de I, on a $f'(x)$………

Pour chacune des fonctions f suivantes :

1. ***Donner son ensemble de définition et son ensemble de dérivabilité (ens. de déf. de la dérivée f')***
2. ***Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f et de l'axe des abscisses***
3. ***Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe***
4. ***Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition***

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$f(x) = (2 - x)\sqrt{x}$

$f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$

$f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 2x + 5}$

Fonction inconnue

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit C_f sa représentation graphique.

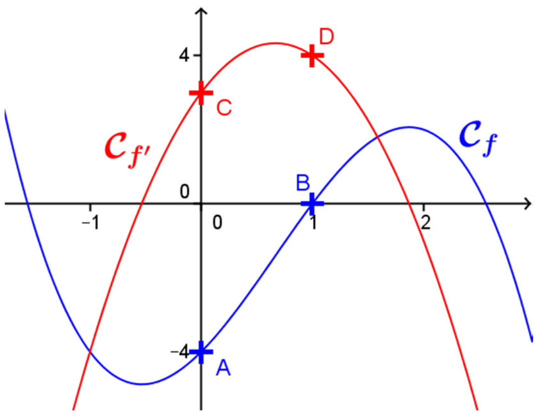
Soit f' la fonction dérivée de f et $C_{f'}$ sa représentation graphique.

C_f passe par les points $A(0; -4)$ et $B(1; 0)$.

$C_{f'}$ passe par les points $C(0; 3)$ et $D(1; 4)$.

Déterminer les réels a, b, c et d tels que

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Position relative de courbes

Pour étudier la position relative des courbes C_f et C_g de deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, on calcule pour tout réel x de I, la différence $f(x) - g(x)$ puis on étudie son signe.

C_f est au-dessus de C_g sur I $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in I\,,\, f(x) > g(x)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in I\,,\, f(x) - g(x) > 0$

C_f est au-dessous de C_g sur I $\Leftrightarrow$ ………………………………. $\Leftrightarrow$ ………………………………………

Etude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+4}$

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère donné.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la position relative de C_f par rapport à l'axe des abscisses.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction .
5. Donner les coordonnées des points en lesquels C_f admet une tangente horizontale.
6. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -5.
7. Etudier la position relative de C_f par rapport à la droite T.
8. Dans un repère orthogonal, avec en abscisses 1cm pour 1 unité et en ordonnées 10 cm pour 1 unité, tracer la droite T, les tangentes horizontales à C_f déterminées à la question **5.** puis tracer l'allure de la courbe C_f.
9. Montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}$.

Trigonométrie

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, … $\leq \cos x \leq$ … ; … $\leq \sin x \leq$ … ; $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 =$ … ; pour $\cos x \neq 0$, $\tan x =$ …

$\cos(x+2\pi) =$ …	$\cos(-x) =$ …	$\cos(x+\pi) =$ …	$\cos(\pi - x) =$ …
$\sin(x+2\pi) =$ …	$\sin(-x) =$ …	$\sin(x+\pi) =$ …	$\sin(\pi - x) =$ …

Valeurs remarquables

$\cos(\,0\,) =$ …

$\sin(\,0\,) =$ …

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ …

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ …

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ …

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ …

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ …

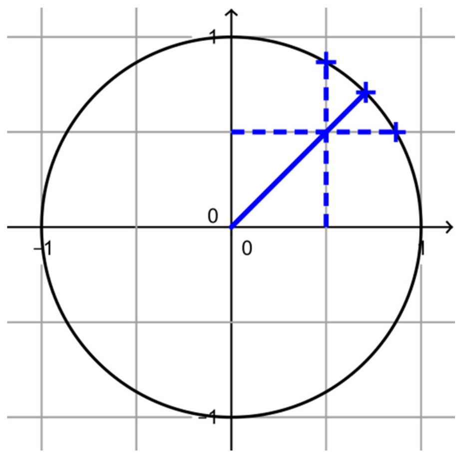
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ …

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ …

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ …

$\cos(\,\pi\,) =$ …

$\sin(\,\pi\,) =$ …



Pour tous les réels a et b,

$\cos(a+b) =$ ……………………………………………………………

$\sin(a+b) =$ ……………………………………………………………

$\cos(a-b) =$ ……………………………………………………………

$\sin(a-b) =$ ……………………………………………………………

$\cos(2a) =$ …………………

$=$ …………………

$=$ …………………

$\sin(2a) =$ …………………

$\cos a = \cos b$ $\Leftrightarrow$ $a =$ ……………………………………… **ou** $a =$ ……………………………………… avec $k \in$ …………

$\sin a = \sin b$ $\Leftrightarrow$ $a =$ ……………………………………… **ou** $a =$ ……………………………………… avec $k \in$ …………

Suites

définitions

La suite (U_n) est croissante $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n$ ......

La suite (U_n) est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n$ ......

La suite (U_n) est constante $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - U_n$ ......

La suite (U_n) est monotone lorsqu'elle est soit .... soit ....

La suite (U_n) n'est pas monotone lorsqu'elle n'est ni .... ni ....

Une suite (U_n) est arithmétique $\Leftrightarrow$ U_0 est donné et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} =$ .... avec r une constante

Une suite (U_n) est géométrique $\Leftrightarrow$ U_0 est donné et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} =$ .... avec q une constante

expression du terme général

(U_n) est arithmétique de 1er terme U_0 et de raison r $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n =$ ....

(U_n) est géométrique de 1er terme U_0 et de raison q $\Leftrightarrow$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n =$ ....

Somme de termes

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 1 + 2 + 3 + \cdots + n =$ ....

avec $q \neq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n =$ ....

Exercice 1

Soit (U_n) et (V_n) les suites telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad U_n = \dfrac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2}$ et $V_n = \dfrac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$

1. Montrer que la suite (U_n) n'est pas monotone et que la suite (V_n) est croissante.
2. Soit (W_n) et (T_n) les suites telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_n = U_n + V_n$ et $T_n = U_n - V_n$

   Montrer que la suite (W_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

   Montrer que la suite (T_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
3. Soit (A_n) et (B_n) les suites telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_n = W_0 + W_1 + \cdots + W_n$ et $B_n = T_0 + T_1 + \cdots + T_n$

   Exprimer A_n et B_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit (U_n) et (V_n) les suites telles que : $U_0 = 1\,,\ V_0 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}$ et $V_{n+1} = \dfrac{U_n + 4V_n}{5}$

Soit (W_n) et (T_n) les suites telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_n = V_n - U_n$ et $T_n = 3U_n + 10V_n$

1. Montrer que la suite (W_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
2. Montrer que la suite (T_n) est constante et préciser cette constante.

Exercice 3

Soit (U_n) la suite telle que : $U_0 = 10$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2}$

Partie A

1. Dans un repère orthonormé d'unité le centimètre, tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ puis construire les termes de la suite jusqu'à U_4 sur l'axe des abscisses.
2. Emettre une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite (U_n).
3. Calculer à la main U_1, U_2, U_3 et U_4 puis vérifier à la calculatrice.

Partie B

Soit (V_n) la suite telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ V_n = U_n - 3$

1. Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
2. En déduire V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n.
3. Donner le sens de variation de la suite (V_n) et en déduire celui de la suite (U_n).
4. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine le rang à partir duquel $U_n < 3{,}0001$ et utiliser le tableau de la calculatrice pour déterminer la valeur affichée par cet algorithme.

```
Initialisation
        n prend la valeur .........
        U prend la valeur .........
Traitement
        Tant que U ......... 3,0001 faire
                n prend la valeur .................
                U prend la valeur .................
        Fin tant que
Sortie
        Afficher n
```

Partie C

Soit (T_n) et (S_n) les suites telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ T_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

1. Exprimer T_n en fonction de n.
2. En déduire S_n en fonction de n.
3. Expliquer ce que l'algorithme ci-dessous affiche.

```
Entrée
        Lire n (entier naturel)
Initialisation
        S prend la valeur 0
        U prend la valeur 10
Traitement
        Pour k allant de 0 à n faire
                S prend la valeur S + U
                U prend la valeur 1/2 U + 3/2
        Fin Pour
Sortie
        Afficher S
```

4. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 2$. Utiliser la ***question 3.*** de la ***partie A*** pour compléter le tableau ci-dessous donnant l'état des variables, sous forme décimale, au cours du traitement de l'algorithme.

k	S	U
0		

Quadrilatères

Pour montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme,
il suffit de montrer **une** des propriétés ci-dessous

- les diagonales ....
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et .... sont ....

Pour montrer qu'un parallélogramme $ABCD$ est un rectangle,
il suffit de montrer **une** des propriétés ci-dessous

- les diagonales ....
- deux côtés consécutifs ....

Pour montrer qu'un parallélogramme $ABCD$ est un losange,
il suffit de montrer **une** des propriétés ci-dessous

- les diagonales ....
- deux côtés consécutifs ....

Pour montrer qu'un rectangle $ABCD$ est un carré,
il suffit de montrer **une** des propriétés ci-dessous

- les diagonales ....
- deux côtés consécutifs ....

Pour montrer qu'un losange $ABCD$ est un carré,
il suffit de montrer **une** des propriétés ci-dessous

- les diagonales ....
- deux côtés consécutifs ....

Vecteurs

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $(x_B\ ;\ y_B)$, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $x_I =$ .... et $y_I =$ ....

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\quad\quad\quad\end{pmatrix}$ $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}\quad\quad\quad\end{pmatrix}$ Soit $k \in \mathbb{R}$, $k\vec{u}\begin{pmatrix}\quad\quad\end{pmatrix}$

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est égale à la longueur $AB =$ ....

La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| =$ ....

Si $x_A \neq x_B$ alors le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à ....

Deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel k non nul tel que ....

Les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ....

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ....

Pour tous points A, B et C on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} =$ .... Cette propriété porte le nom de ....

Equations de droite

L'axe des abscisses a pour équation .... L'axe des ordonnées a pour équation ....

Une droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation de la forme ....

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme ....

$y = mx + p$ est l'équation .... d'une droite non parallèle à l'axe des ....

$ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une équation .... de droite.

La droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}$

Si $\vec{n}\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (d) alors (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$

Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur d'une droite (d) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (d). $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont donc ....

Système

Résoudre par substitution

$$\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 5x + 3y = -21 \end{cases}$$

Résoudre par combinaison linéaire

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases}$$

Produit scalaire

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \bullet \vec{v} =$ ....

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls. Soit A, B et C trois points distincts.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$ ....

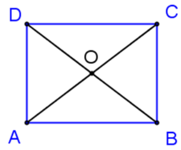
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$ ....

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraires alors $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} =$ ....

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$ avec H projeté orthogonal du point ...... sur la droite ....

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \iff$ .... ; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0 \iff ABC$ triangle ....

Avec le projeté orthogonal et les propriétés de calcul



1°) Soit $ABCD$ un rectangle direct de centre O tel que $AB = 8$ et $AD = 6$. Calculer :

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{OA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$

2°) On sait que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\|\vec{w}\| = 5$, $\vec{u} \bullet \vec{v} = -2$, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ orthogonaux. Calculer :

$-7\vec{u} \bullet 2\vec{v}$ $\qquad$ $2\vec{u} \bullet (7\vec{w} - \vec{v})$ $\qquad$ $(\vec{u} + 2\vec{v}) \bullet (3\vec{u} - \vec{v})$

$(3\vec{u} - 2\vec{w})^2$ $\qquad$ $(\vec{u} - \vec{v})^2$ $\qquad$ $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Géométrie analytique

Dans un repère orthonormé, on considère $A(-2\,;7)$, $B(2\,;0)$, $C(9\,;4)$, $D(5\,;\,11)$, $E(0\,;\,-7)$ et $F(-9\,;\,3)$.

1. Montrer que ABC est un triangle isocèle rectangle.
2. Montrer que $ABCD$ est un carré.
3. Soit I milieu du segment $[AC]$. Montrer que les points I, D et E ne sont pas alignés.
4. Montrer que les droites (BC) et (DF) sont parallèles.
5. Montrer que $ACBF$ est un parallélogramme.
6. Calculer les longueurs BC et BF, le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BF}$; en déduire $\cos \widehat{CBF}$, puis $\widehat{CBF}$ en radians.
7. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par E et perpendiculaire à (AC).
8. Construire le point G tel que $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ puis calculer les coordonnées de G.
9. Montrer, de deux façons différentes, que G est le milieu de $[BF]$.

Equation de cercle

Le cercle de centre I $(x_I\,;\,y_I)$ et de rayon R a pour équation $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 =$ ....

QCM (choisir la bonne réponse et la compléter) L'ensemble des points M $(x; y)$ tels que

1°) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ est :

☐ $\emptyset$
☐ le point I (... ; ...)
☐ le cercle de centre I (... ; ...) et de rayon $R =$ ...
☐ la droite d'équation réduite ....

2°) $x^2 + y^2 - 2x + 10 = 0$ est :

☐ $\emptyset$
☐ le point I (... ; ...)
☐ le cercle de centre I (... ; ...) et de rayon $R =$ ...
☐ la droite d'équation réduite ....

3°) $2x - 3y - 9 = 0$ est :

☐ $\emptyset$
☐ le point I (... ; ...)
☐ le cercle de centre I (... ; ...) et de rayon $R =$ ...
☐ la droite d'équation réduite ....

4°) $x^2 + y^2 + 3x + 4y + 6 = 0$ est :

☐ $\emptyset$
☐ le point I (... ; ...)
☐ le cercle de centre I (... ; ...) et de rayon $R =$ ...
☐ la droite d'équation réduite ....

Géométrie dans l'espace

Dans l'espace,

un plan est défini par trois points ....

Compléter les *règles d'incidence* ci-dessous

Deux plans de l'espace sont
soit sécants
soit ....

Deux plans parallèles de l'espace sont
soit ....
soit ....

L'intersection de deux plans sécants de l'espace
est ....

Deux droites de l'espace sont
soit coplanaires (dans un même plan)
soit non-coplanaires

Deux droites coplanaires de l'espace sont
soit sécantes
soit ....

Deux droites parallèles de l'espace sont
soit ....
soit ....

Deux droites non parallèles de l'espace sont
soit ....
soit ....

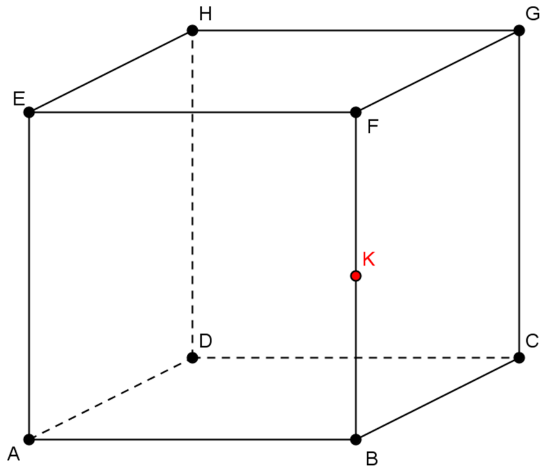
Un plan et une droite de l'espace sont
soit sécants
soit ....

Si une droite est parallèle à un plan, alors elle est
soit ....
soit ....

L'intersection d'un plan et d'une droite sécants
est ....

QCM (une seule bonne réponse par question)

Soit $ABCDEFGH$ un cube et K le milieu de $[BF]$



1°) Les plans (BCF) et (DGH) sont
☐ strictement parallèles
☐ confondus
☐ sécants

2°) Les droites (ED) et (FC) sont
☐ parallèles
☐ sécantes
☐ non coplanaires

3°) Les droites (DF) et (EC) sont
☐ parallèles
☐ sécantes
☐ non coplanaires

4°) Les droites (EB) et (HF) sont
☐ parallèles
☐ sécantes
☐ non coplanaires

5°) La droite (HF) et le plan (ABE) sont
☐ strictement parallèles
☐ sécants
☐ la droite en contenue dans le plan

6°) La droite (HK) est
☐ strictement parallèle au plan (FBD)
☐ sécants au plan (FBD)
☐ contenue dans le plan (FBD)

7°) La droite (KG) est
☐ strictement parallèle au plan (ADH)
☐ sécants au plan (ADH)
☐ contenue dans le plan (ADH)

8°) Deux droites n'ayant pas de point commun sont parallèles
☐ vrai
☐ faux, contre-exemple : ....

9°) Deux plans parallèles à un troisième plan sont parallèles entre eux
☐ vrai
☐ faux, contre-exemple : ....

10°) Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux
☐ vrai
☐ faux, contre-exemple : ....

Probabilités

Soit A et B deux événements. Soit $\overline{\mathrm{A}}$ l'événement contraire de A.

$P(\overline{\mathrm{A}}) =$ .... $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) =$ ....

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs notées x_1 , x_2 , … et x_n.

L'espérance de X est $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$

La variance de X est $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times P(X = x_i)$

$$= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i) - \left(E(X)\right)^2$$

L'écart-type de X est $\sigma(X) =$ ....

Loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire n'ayant que .... issues possibles appelées .... et .... , notées S et $\bar{S}$ avec $P(S) = p$

On considère un schéma de Bernoulli, qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètres p .... et ....

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès.

On dit que X suit la loi .... de paramètres ...... et ...... , on note $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$

Dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli à n épreuves, le nombre de chemins menant à k succès est appelé .... noté $\binom{n}{k}$ qu'on lit ....

$P(X = k) =$..

L'espérance de X est $E(X) =$ .... elle représente le nombre .... de succès.

La variance de X est $V(X) =$ ....

L'écart-type de X est $\sigma(X) =$ ....

La représentation graphique de la loi binomiale de paramètre n et p est un .... avec en abscisses k allant de 0 à n et en ordonnées $P(X = k)$.

Exercice 1

Une urne contient 6 billes vertes et 4 billes rouges, indiscernables au toucher.

On tire successivement, et avec remise, trois billes de l'urne.

1. Représenter cette expérience par un arbre pondéré.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billes vertes obtenues.

- **a.** Utiliser la question précédente pour dresser un tableau donnant la loi de probabilité de X.
- **b.** En déduire son espérance $E(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type $\sigma(X)$.
- **c.** Donner une interprétation du résultat de $E(X)$.
- **d.** Représenter graphiquement la loi de X dans un repère orthogonal avec en abscisses 1 cm pour 1 bille verte et en ordonnées 1 cm pour $\frac{10}{125} = 0{,}08$

3.

- **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
- **b.** Vérifier à la calculatrice la loi de probabilité établie à la question **2.a**.
- **c.** Retrouver les résultats de la question **2.b.** en utilisant les formules pour $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$

Exercice 2

Chez un fabricant de calculatrices, une étude a montré que 10 % des produits ont un défaut.

Lors de la commande groupée, le lycée a commandé un lot de 150 calculatrices.

Les probabilités que ces calculatrices aient des défauts sont indépendantes.

On définit la variable aléatoire X donnant le nombre de calculatrices défectueuses.

1. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}1$.

2. $E(X) = \ldots$ ☐ 10 ☐ 13,5 ☐ 15 ☐ 67,5 ☐ 75 ☐ 150

QCM (choisir la (les) bonne(s) réponse(s) et compléter les pointillés en arrondissant à 10^{-4})

3. La probabilité qu'exactement 10 calculatrices soient défectueuses est égale à ....

☐ $0{,}1^{10}$
☐ $\binom{150}{10}\ 0{,}1^{10}$
☐ $0{,}1^{10} \times 0{,}9^{140}$
☐ $\binom{150}{10}\ 0{,}1^{10} \times 0{,}9^{140}$

4. $P(X \geq 15) \simeq$ ....

☐ $1 - P(X < 14)$
☐ $1 - P(X \leq 15)$
☐ $1 - P(X \leq 14)$
☐ $1 - P(X < 15)$

5. $P(X > 20) \simeq$ ....

☐ $1 - P(X < 20)$
☐ $1 - P(X \leq 19)$
☐ $1 - P(X \leq 20)$
☐ $1 - P(X \leq 21)$

6. La probabilité qu'au plus 10 calculatrices soient défectueuses dans ce lot est égale à ....

☐ $P(X > 10)$
☐ $P(X < 10)$
☐ $P(X \leq 10)$
☐ $P(X \geq 11)$

7. La probabilité qu'il ait plus de 10 calculatrices défectueuses dans ce lot est égale à ....

☐ $P(X > 10)$
☐ $P(X < 10)$
☐ $P(X \leq 10)$
☐ $P(X \geq 11)$

8. La probabilité qu'il y ait de 11 à 18 calculatrices défectueuses dans ce lot est égale à ....

☐ $P(11 \leq X \leq 18)$
☐ $P(X \leq 18) - P(X \leq 11)$
☐ $P(X \leq 18) - P(X < 11)$
☐ $P(X \leq 18) + P(X \geq 11)$

Exercice 3

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres de deux catégories : des conifères et des feuillus.

Le stock comporte 52,5 % de conifères. Les autres sont des feuillus.

On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie.

On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

Arrondir les résultats à 10^{-3}

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
3. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux feuillus ?

Intervalle de fluctuation de 2nde

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est p.

On considère un échantillon de taille n.

On observe que le caractère est présent dans cet échantillon avec une fréquence égale à f.

Lorsque $\boldsymbol{n \geq 25}$ et $\boldsymbol{0,2 \leq p \leq 0,8}$ alors il y a environ 95% des échantillons de taille n qui sont tels que la fréquence f appartient à un intervalle I de fluctuation au seuil de 95 % où

$$I = \left[p - \frac{\dots}{\sqrt{\dots}} \; ; \; p + \frac{\dots}{\sqrt{\dots}}\right]$$

Intervalle de fluctuation de 1ère S

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'individus ayant le caractère dans l'échantillon de taille n.

On peut considérer que $X \sim \mathcal{B}(n\,;\,p)$.

Un intervalle I de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 % est $I = \left[\frac{a}{n} \; ; \; \frac{b}{n}\right]$

Avec a le plus petit entier tel que $P(X \leq a) >$ ……….. et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq$ ………..

Prise de décision

Si $f \notin I$ alors on rejette l'hypothèse

Si $f \in I$ alors on ne rejette pas l'hypothèse

Exercice

Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau médicament contre le mal des transports est efficace sur les trois-quarts des malades habituels. Une association indépendante collecte des données auprès de personnes habituellement malades. Sur 57 personnes, 50 n'ont pas été malades à la suite de la prise du médicament. Que peut-on dire de l'affirmation du laboratoire pharmaceutique ?

avec l'intervalle de fluctuation de 2nde *résultats à* 10^{-4}

$n = \dots\dots$ $\quad p = \dots\dots\dots\dots$ $\quad f = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \simeq \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$I = \left[\dots\dots\dots\dots - \frac{\dots}{\sqrt{\dots\dots}} \; ; \; \dots\dots\dots\dots + \frac{\dots}{\sqrt{\dots\dots}}\right] \simeq [\dots\dots\dots\dots\dots \; ; \; \dots\dots\dots\dots\dots]$$

f … … I donc ………………………………………………………………………………………..

avec l'intervalle de fluctuation de 1ère S

On choisit au hasard et de façon indépendante 57 personnes habituellement malades ayant pris le médicament. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes pas malades dans cet échantillon de 57 personnes. Sous l'hypothèse selon laquelle le médicament est efficace sur les trois-quarts des malades habituels, on a $X \sim \mathcal{B}(\dots\dots\;;\;\dots\dots\dots\dots)$

A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice,

le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) >$ ………….. est $a =$ ………

le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq$ ………….. est $b =$ ………

donc $I = \left[\frac{\dots\dots}{\dots\dots} \; ; \; \frac{\dots\dots}{\dots\dots}\right]$

$\simeq [\dots\dots\dots\dots\dots\dots \; ; \; \dots\dots\dots\dots\dots]$

f … … I donc ………………………………………………………………………………………..